Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 5 im Sommersemester 2021 (am 14.05.21)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
WS 20.x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Wintersemester 2020.
SS 21.x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Sommersemester 2021.

Wir werden die Zitate des ersten Typs bevorzugt verwenden und die Verweise der anderen Type nur für erst vor kurzem oder häufig verwendete Ergebnisse oder Definition zusätzlich angeben.

14 Kommutative lineare algebraische Gruppen

14.2 Diagonalisierbare Gruppen und Tori

14.2.2 Beispiel

Sei $G = \mathbf{D}_n$. Wir schreiben die Elemente $x \in G$ in der Gestalt

$$x = \operatorname{diag}(\chi_1(x),...,\chi_n(x)) = \begin{pmatrix} \chi_1(x) & 0 & .. & 0 \\ 0 & \chi_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \chi_n(x) \end{pmatrix} \in G$$

Dann sind die Abbildungen $\chi_i{:}G \longrightarrow k^* = \mathbf{G}_m$ (als Koordinaten-Funktionen) rationale Charaktere von G. Es gilt

$$\begin{aligned} k[\mathbf{D}_n] &= k[\chi_1,..., \chi_n, (\chi_1 \bullet ... \bullet \chi_n)^{-1}] \\ &= k[\chi_1,..., \chi_n, \chi_1^{-1},..., \chi_n^{-1}] \\ &= \sum_{(a_1,...,a_n)\in\mathbb{Z}^n} k\bullet \chi_1^{a_1}\bullet ...\bullet \chi_n^{a_n} \end{aligned}$$

(vgl. 2.2.2 Aufgabe 1). Nach dem Satz von Artin (vgl. Lang [2], Kapitel VIII, §4, Theorem 7) sind die (paarweise verschiedenen) Potenzprodukte

$$\chi_1^{a_1}\bullet ...\bullet \chi_n^{a_n} \text{ mit } (a_1,...,a_n) \in \mathbb{Z}^n \tag{1}$$

linear unabhängig über k, bilden also eine Basis des k-Vektorraums $k[\mathbf{D}_n]$. Weil jeder Charakter von $\mathbf{D}_n$ in $k[\mathbf{D}_n]$ liegt, also eine k-Linearkombination der Charaktere (1) ist, gleichzeitig aber nach Artin paarweise verschiedende Charaktere linear unabhängig sind, hat jeder Charakter von $\mathbf{D}_n$ die Gestalt (1). Es besteht also ein Gruppen-Isomorphismus

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\cong} X^*(\mathbf{D}_n),\ (a_1,...,a_n) \mapsto \chi_1^{a_1}\bullet ...\bullet \chi_n^{a_n}. \tag{2}$$

Speziell für n = 1 sehen wir, die Charaktere von $\mathbf{G}_m = \mathbf{D}_1$ sind gerade die Abbildungen

$$\mathbf{G}_m = k^* \longrightarrow k^* = \mathbf{G}_m,\ t \mapsto t^n, \text{ mit } n \in \mathbb{Z}.$$

Ein Homomorphismus $\mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{D}_n$ hat damit die Gestalt

$$\mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{D}_n,\ t \mapsto \operatorname{diag}(t^{a_1}, \dots , t^{a_n}) \text{ mit } (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{Z}^n$$

(weil die Zusammensetzung von $\mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{D}_n$ mit χ_i: $\mathbf{D}_n \longrightarrow \mathbf{G}_m$ für jedes i ein Charakter von $\mathbf{G}_m$ ist). Wir erhalten so einen Gruppen-Isomorphismus

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\cong} X_*(\mathbf{D}_n),\ (a_1,\dots,a_n) \mapsto (t \mapsto \operatorname{diag}(t^{a_1}, \dots , t^{a_n})). \qquad (3)$$

14.2.3 Satz: Charakterisierung der Diagonalisierbarkeit

Sei G eine algebraische Gruppe über k. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) G ist diagonalisierbar.

(ii) X*(G) ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, deren Elemente eine k-Vektorraumbasis des Koordinatenrings k[G] bilden.

(iii) Jede rationale Darstellung von G ist eine direkte Summe von 1-dimensionalen rationalen Darstellungen von G.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Nach Voraussetzung ist G eine abgeschlossene Untergruppe einer der Gruppen $\mathbf{D}_n$. Die natürliche Einbettung $G \hookrightarrow \mathbf{D}_n$ induziert einen surjektiven k-Algebra-Homomorphismus der Koordinatenringe,

$$k[\mathbf{D}_n] \twoheadrightarrow k[G],\ f \mapsto f|_G. \qquad (1)$$

Die Einschränkung eines Charakters von $\mathbf{D}_n$ auf G ist ein Charakter von G. Durch Einschränken dieser Surjektion erhalten wir eine Abbildung

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{D}_n) \longrightarrow \mathbf{X}^*(G),\ \chi \mapsto \chi|_G. \qquad (2)$$

Da die Charaktere von $\mathbf{D}_n$ den Koordinatenring von $k[\mathbf{D}_n]$ als Vektorraum erzeugen, wird k[G] als Vektorraum von den Einschränkungen dieser Charaktere erzeugt:

$$k[G] = \sum_{\chi \in X^*(\mathbf{D}_n)} k\cdot\chi|_G \qquad \text{(weil (1) surjektiv ist)}$$

$$= \sum_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{Z}^n} k\cdot \chi_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot \chi_n^{a_n}|_G. \qquad \text{(nach 14.2.2 (2))}$$

Da jeder Charakter von G in k[G] liegt, ist er eine k-Linearkombination der Charaktere $\chi_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot \chi_n^{a_n}|_G$. Nach dem Satz von Artin (vgl. Lang [2], Kapitel VIII, §4, Theorem 7), muß er gleich einem dieser Charaktere sein,

$$X^*(G) = \{ \chi_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot \chi_n^{a_n}|_G \mid (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Damit wird X*(G) von den endlich vielen Charakteren $\chi_1|_G , \dots , \chi_n|_G$ erzeugt. Wie gerade gezeigt, erzeugen deren Potenzprodukte den k-Vektorraum k[G]. Nach dem Satz von Artin bilden sie eine k-Vektorraumbasis von k[G].

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>. Sei

$$\phi\colon G \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$$

eine rationale Darstellung von G. Wir fixieren einen Basis von V, welche es gestattet, ϕ als Homomorphismus

$$\phi\colon G \longrightarrow \mathbf{GL}_r$$

(mit r geeigneten) zu betrachten. Für jedes $x \in G$ gilt dann

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(x) & \phi_{12}(x) & \dots & \phi_{1r}(x) \\ \phi_{21}(x) & \phi_{22}(x) & \dots & \phi_{2r}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{r1}(x) & \phi_{r2}(x) & \dots & \phi_{rr}(x) \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}(x)\bullet E_{ij}$$

mit regulären Funktion $\phi_{ij}\in k[G]$. Jede dieser regulären Funktion ϕ_{ij} ist eine k-Linearkombination von Charakteren von G. Deshalb läßt sich ϕ als Linearkombination von r×r-Matrizen mit Einträgen aus k schreiben, deren Koeffizienten Charaktere von G sind, sagen wir

$$\phi(x) = \sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} \chi(x)\bullet A_\chi$$

mit $A_\chi \in M_r(k)$ oder in einer von der Wahl der Basis von V unabhängigen Schreibweise,

$$A_\chi \in \mathrm{End}_k(V). \tag{3}$$

Dabei sind nur endlich viele der A_χ von Null verschieden,

$$A_\chi = 0 \text{ für fast alle } \chi\in\mathbf{X}^*(G).$$

Weil ϕ ein Gruppen-Homomorphismus ist, gilt für $x,y\in G$

$$\begin{aligned}\sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} \chi(x)\chi(y)\bullet A_\chi &= \sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} \chi(xy)\bullet A_\chi \\ &= \phi(xy) \\ &= \phi(x)\bullet\phi(y) \\ &= \sum_{\chi,\psi\in\mathbf{X}^*(G)} \chi(x)\bullet \psi(y)\bullet A_\chi\bullet A_\psi.\end{aligned}$$

Die Abbbildungen

$$G\times G \longrightarrow \mathbf{G}_m,\ (x,y) \mapsto \chi(x)\bullet \psi(y),$$

sind paarweise verschiedene[1] Charaktere von G×G. Die Identität

$$\sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} \chi(x)\chi(y)\bullet A_\chi = \sum_{\chi,\psi\in\mathbf{X}^*(G)} \chi(x)\bullet \psi(y)\bullet A_\chi\bullet A_\psi$$

[1] Man beachte, für Charaktere α, β, γ und δ gilt nur dann $\alpha(x)\beta(y) = \gamma(x)\bullet \delta(y)$ für alle $x, y \in G$, wenn $\alpha=\gamma$ und $\beta = \delta$ ist (man setze $y = e$ bzw. $x = e$).

ist somit eine Relation von Charakteren auf G×G. Weil die Charaktere von G×G linear unabhängig über k sind, folgt durch Koeffizientenvergleich

$$A_\chi \bullet A_\psi = \delta_{\chi,\psi} \bullet A_\chi \tag{4}$$

(wenn $\delta_{\chi,\psi}$ das Kronecker-Symbol bezeichnet).Weil $\phi(e)$ die identische Abbildung von V ist, gilt für $v \in V$

$$\begin{aligned}
v &= Id(v) \\
&= \phi(e)(v) && \text{(wegen } \phi(e) = Id\text{)} \\
&= \Big(\sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} \chi(e)\bullet A_\chi\Big)(v) && \text{(nach Definition der } A_\chi\text{)} \\
&= \Big(\sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} A_\chi\Big)(v) && \text{(wegen } \chi(e) = 1 \text{ für alle } \chi\text{)}
\end{aligned}$$

also

$$\sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} A_\chi = Id. \tag{5}$$

Wir setzen

$$V_\chi := A_\chi(V).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
V &= Id(V) \\
&= \Big(\sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} A_\chi\Big)(V) && \text{(nach (5))} \\
&\subseteq \sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} A_\chi(V) \\
&= \sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} V_\chi \\
&\subseteq V
\end{aligned}$$

also

$$\sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} V_\chi = V,$$

Weiter gilt für $x \in G$ und $y \in V_\chi$, d.h. $y = A_\chi(v)$ für ein $v \in V$:

$$\begin{aligned}
\phi(x)(y) &= \Big(\sum_{\psi\in\mathbf{X}^*(G)} \psi(x)\bullet A_\psi\Big)(y) && \text{(nach Definition der } A_\psi\text{)} \\
&= \sum_{\psi\in\mathbf{X}^*(G)} \psi(x)\bullet A_\psi A_\chi(v) \\
&= \chi(x)\bullet A_\chi A_\chi(v) && \text{(nach (4))}
\end{aligned}$$

$$= \chi(x)\bullet A_\chi(v) \qquad \text{(nach (4))}$$
$$= \chi(x)\bullet y \qquad \text{(nach Definition von y)}$$

also

$$\phi(x)(y) = \chi(x)\bullet y \text{ für } x \in G \text{ und } y \in V_\chi \tag{6}$$

Nach (4) ist A_χ auf V_ψ die identische Abbildung für $\chi=\psi$ und 0 sonst. Deshalb ist die gefundene Summenzerlegung von V direkt,

$$\bigoplus_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} V_\chi = V. \tag{7}$$

Weil V endlich-dimensional ist, ist die Anzahl der von 0 verschiedenen V_χ endlich. Wir können also schreiben

$$V = V_{\chi_1} \oplus ... \oplus V_{\chi_t} \text{ mit } V_{\chi_i} \neq 0.$$

Nach (6) operiert G auf V_{χ_i} durch Multiplikation mit dem Charakter χ_i. Wenn wir V_{χ_i} in beliebiger Weise in eine direkte Summe von 1-dimensionalen Vektorräumen zerlegen, gilt die auch für jeden der direkten Summanden.

Die rationale Darstelleung ϕ ist somit eine direkte Summen der 1-dimensionalen Darstellungen, die mit den Charakterem χ_1 , ... , χ_t multiplizieren. Dabei ist

$$\dim V_{\chi_i}$$

gerade die Multiplizität, mit welcher der Charakter χ_i vorkommt.

<u>(iii) $\Rightarrow$ (i)</u>. Nach 2.3.7 gibt es eine natürlichen Zahl n und einen Isomorphismus

$$h:G \xrightarrow{\cong} H$$

mit einer abgeschlossenen Untergruppe $H \hookrightarrow \mathbf{GL}_n$. Wir können h als einen injektiven Homomorphismus algebraischer Gruppen

$$h: G \longrightarrow \mathbf{GL}_n = \mathbf{GL}(V) \text{ mit } V = k^n$$

betrachten, d.h. als rationale Darstellung von G. Nach Voraussetzung (iii) ist h eine direkte Summe von 1-dimensionalen Darstellungen, d.h. der G-Modul V ist direkte Summe von 1-dimensionalen G-Moduln, sagen wir

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_n \text{ mit } \dim_k V_i = 1 \text{ für jedes i.}$$

Wegen $\dim_k V_i = 1$ opereriert G auf V_i durch einen Charakter von G, sagen wir

$$h(g)v = \chi_i(g)\bullet v \text{ für jedes } g \in G, \chi_i \in \mathbf{X}^*(G).$$

Man beachte, mit h ist auch $\chi_i: G \longrightarrow G_m$ ein Gruppen-Homomorphismus, denn für $g',g''\in G$ und $v \in V_i$ gilt

$$
\begin{aligned}
\chi_i(g'g'')\bullet v &= h(g'g'')(v)\\
&= h(g')(h(g'')(v))\\
&= h(g')(\chi_i(g'')\bullet v)\\
&= \chi_i(g'')\bullet h(g')(v)\\
&= \chi_i(g'')\bullet\chi_i(g')\bullet v.
\end{aligned}
$$

Da dies für jedes $v \in V_i$ gilt, folgt $\chi_i(g'g'') = \chi_i(g')\bullet \chi_i(g'')$ für beliebige $g',g'' \in G$.

Außerdem ist χ_i als Zusammensetzung

$$G\times V_i \xrightarrow{\alpha} G\times V \xrightarrow{\beta} V \xrightarrow{\gamma} V_i.$$

von regulären Abbildungen auch regulär. Dabei ist α induziert durch die natürliche Einbettung

$$V_i \hookrightarrow V,$$

β ist die Abbildung $G\times V \longrightarrow V$, $(g,v) \mapsto h(g)(v)$, und γ ist die Projektion

$$V = V_1\oplus\ldots\oplus V_n \longrightarrow V_i$$

der direkten Summe auf den i-ten direkten Summanden.

Wir wählen aus jedem V_i einen von Null verschiedenen Vektor

$$v_i \in V_i - \{0\}.$$

Die Vektoren v_i zusammen bilden eine Basis von V. Bezeichne $\sigma: k^n \longrightarrow k^n$ den k-linearen Automorphismus, der den i-ten Standard-Einheitsvektor e_i von k^n in den Vektor v_i abbildet für $i = 1,\ldots, n$. Dann gilt für jedes i

$$
\begin{aligned}
(\sigma^{-1}\bullet h(g)\bullet\sigma)(e_i) &= \sigma^{-1}\bullet h(g)(v_i)\\
&= \sigma^{-1}(\chi_i(g)\bullet v_i)\\
&= \chi_i(g)\bullet\sigma^{-1}(v_i)\\
&= \chi_i(g)\bullet e_i
\end{aligned}
$$

Die Matrix $\sigma^{-1}\bullet h(g)\bullet\sigma$ hat also Diagonalgestalt für jedes $g \in G$. Die Zusammensetzung von h mit dem inneren Automorphismus

$$a\colon \mathbf{GL}_n \xrightarrow{\cong} \mathbf{GL}_n,\ x \mapsto \sigma^{-1}\bullet x\bullet\sigma,$$

hat in der abgeschlossenen Untergruppe $\mathbf{D}_n$ von $\mathbf{GL}_n$:

$$a\circ h\colon G \underset{h}{\xrightarrow{\cong}} H \underset{a}{\xrightarrow{\cong}} \sigma^{-1}\bullet H\bullet\sigma \hookrightarrow \mathbf{D}_n \hookrightarrow \mathbf{GL}_n.$$

Wir haben gezeigt, G ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathbf{D}_n$, d.h. G ist diagonalisierbar.

QED.

14.2.4 Folgerung: Eigenschaften diagonalisierbarer Gruppen

Sei G eine diagonalisierbare lineare algebraische Gruppe über dem Körper k der Charakteristik p. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) X*(G) ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe.
(ii) Der Koordinatenring k[G] ist isomorph zur Gruppen-Algebra von X*(G) über k.
(iii) Ist $p > 0$, so besitzt X*(G) keine p-Torsion.

Beweis. Zu (i). Dies gilt auf Grund der Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) des gerade bewiesenen Satzes WS 21.5 14.2.3 oder 3.2.3.
Zu (ii). Die Gruppen-Algebra einer Gruppe H über k ist definiert als der k-Vektorraum

$$A := \sum_{h\in H} k\cdot e(h)$$

mit der Basis $\{e(h)\}_{h\in H}$, welcher die Struktur einer k-Algebra besitzt mit einer über k bilinearen Multiplikation, die auf den Basis-Elementen gerade mit der Multiplikation der Gruppe H übereinstimmt, d.h. mit der Multiplikation

$$A \times A \longrightarrow A, \left(\sum_{h'\in H} c_{h'}\cdot e(h'), \sum_{h''\in H} d_{h''}\cdot e(h'')\right) \mapsto \sum_{h',h''\in H} c_{h'}\cdot d_{h''}\cdot e(h'\cdot h'').$$

Speziell für $H = X^*(G)$ ist die Multiplikation in A gegeben durch

$$e(\chi')\cdot e(\chi'') := e(\chi'+\chi'').$$

In diesem Fall ist die k-lineare Abbildung

$$\varphi: A = \sum_{\chi\in X^*(G)} k\cdot e(\chi) \longrightarrow k[G],\ e(\chi) \mapsto \chi,$$

welche jedes Element der k-Vektorraumbasis $\{e(\chi)\}_{\chi\in X^*(G)}$ von A in den zugehörigen Charakter abbildet, ein k-Algebra-Homomorphismus, denn für je zwei Charaktere $\chi', \chi'' \in X^*(G)$ gilt

$$\varphi(e(\chi')\cdot e(\chi'')) = \varphi(e(\chi'+\chi'')) = \chi'\cdot\chi'' = \varphi(e(\chi'))\cdot\varphi(e(\chi'')),$$

denn die Summe $\chi'+\chi''$ der beiden Charaktere in X*(G) ist definiert als das Produkt $\chi'\cdot\chi''$ der regulären Funktionen aus k[G].

Auf Grund des gerade bewiesenen Satzes (WS 21.5 14.2.3 oder 3.2.3) bilden die Charaktere von G eine Basis des k-Vektorraums k[G]. Die Abbildung φ bilden also eine k-Vektorraumbasis von A in eine k-Vektorraumbasis von k[G], ist also ein k-linearer Isomorphismus und damit ein Isomorphismus von k-Algebren.

Zu (iii). Wir beachten zunächst, daß k außer 1 keine p-te Einheitswurzel besistzt, denn aus $x^p = 1$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= x^p - 1 \\ &= x^p - 1^p \\ &= (x-1)^p && \text{(wegen } p = \mathrm{Char}(k)) \end{aligned}$$

also

$$0 = x-1, \qquad \text{(weil k ein Körper ist)}$$

also $x = 1$.
Angenommen, **X***(G) besitzt p-Torsion.
Sei jetzt $\chi\in$ **X***(G) ein Charakter mit

$p \bullet \chi = 0$.

Wir haben zu zeigen, dann gilt $\chi = 0$, d.h. χ ist der triviale Charakter.
Nach Voraussetung gilt

$$\chi(g)^p = 1 \text{ für jedes } g \in G.$$

Weil 1 die einzige p-te Einheitswurzel von k ist und die Werten der Abbildung χ in k liegen, folgt

$$\chi(g) = 1 \text{ für jedes } g \in G,$$

d.h. χ ist der triviale Charakter von G.
QED.

Inhalt